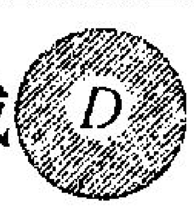
第 8 章　重积分

基础知识与规律总结

8.1　二重积分

人类的认识由浅入深、由表及里，对于积分的认识亦是如此，见表 8-1.

表 8-1

积分域	积分形式
区间	定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
平面区域 	二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$
空间区域	三重积分 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$
平面曲线或空间曲线 	对弧长的曲线积分（Ⅰ）$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 或 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 对坐标的曲线积分（Ⅱ）$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 或 $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$
空间曲面 	对面积的曲面积分（Ⅰ）$\iint\limits_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 对坐标的曲面积分（Ⅱ） $\iint\limits_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

一、二重积分的概念

1. 定义

由定积分的定义和微元法可知，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分是 $f(x)$ 在闭区间

$[a,b]$上点的函数值与该点处的区间长度乘积的和式的极限. 与定积分类似,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 d_i 为小区域 σ_i 的直径, $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$.

注 ① 直角坐标系中二重积分记作 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

② 若函数 f 在有界闭区域 D 上可积,则函数 f 在区域 D 上有界.

2. 二重积分的几何意义

当函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续时,若 $f(x,y)\geqslant 0$,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示以区域 D 为底、以函数 $f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积;若 $f(x,y)\leqslant 0$,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 表示以区域 D 为底、以函数 $|f(x,y)|$ 为顶的曲顶柱体的体积的相反数.

综上,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示以区域 D 为底、以函数 $f(x,y)$ 为顶的曲顶柱体的"有向体积". 其有向性这样规定:若 $f(x,y)\geqslant 0$,则体积为正;若 $f(x,y)\leqslant 0$,则体积为负. 二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 为正负各部分体积的代数和.

【例 8.1】 根据二重积分的几何意义,求 $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$, $a>0$.

【解】 被积函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 是球面的上半部分,见图 8-1,积分区域恰好是球面在 xOy 面上的投影,根据二重积分的几何意义知该积分为上半球体的体积,所以

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

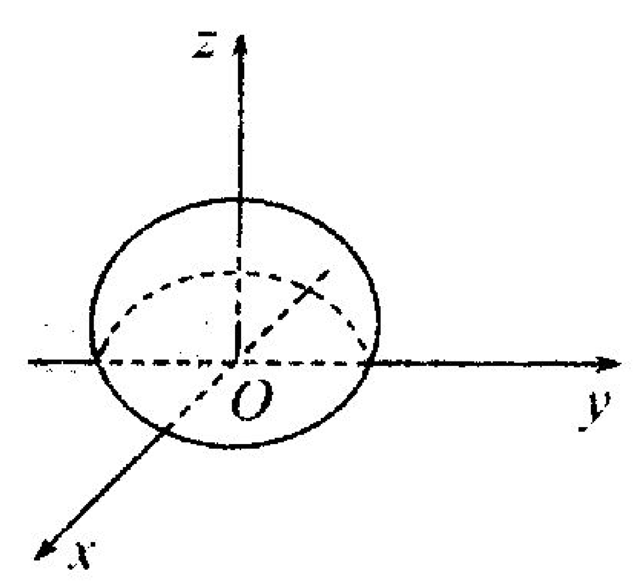


图 8-1

二、二重积分的基本性质

(1) $\iint\limits_D kf(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$, k 为常数;

(2) $\iint\limits_D [f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\pm\cdots\pm f_n(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\iint\limits_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm\cdots\pm \iint\limits_D f_n(x,y)\,\mathrm{d}\sigma;$$

(3) $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = A$, A 为 D 的面积;

(4) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \cdots + \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$,

其中 $D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_k$,且 $D_i\cap D_j=\varnothing\,(i\neq j)$;

(5)(**比较定理**)设 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$, $(x,y)\in D$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$;

(6)(**估值定理**)设$(x,y)\in D$,$m\leqslant f(x,y)\leqslant M$,则$mA\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant MA$,其中$A$为$D$的面积.

【例 8.2】利用二重积分的性质估计$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(4x^2+y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值.

【解】在积分域内,$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$,则$7\leqslant 4x^2+y^2+7\leqslant 4(x^2+y^2)+7\leqslant 15$,

又积分区域D的面积为2π,故

$$7\cdot 2\pi\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(4x^2+y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 15\cdot 2\pi,$$

即$14\pi\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}(4x^2+y^2+7)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 30\pi$.

(7)(**中值定理**)设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,则在D上至少存在一个(ξ,η),使得$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)A$,其中$A$为$D$的面积;

【例 8.3】设积分区域D是以原点为中心,半径为r的圆域,

求$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】根据二重积分的中值定理,D上至少存在一点(ξ,η),使得

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi\eta)\cdot\pi r^2,$$

又当$r\to 0$时,$(\xi,\eta)\to(0,0)$,

故$\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{r\to 0}\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi\eta)=1$.

(8)(**对称性定理**)设积分域D关于坐标轴对称,被积函数$f(x,y)$为奇偶函数的积分,

(i) 若D关于x轴对称,$f(x,y)$是y的奇函数,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$;若$f(x,y)$是$y$的偶函数,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y)\\ \iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases};$$

其中D^*为D在x轴的上半部分.

(ii) 若D关于y轴对称,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0, f(-x,y)=-f(x,y)\\ \iint\limits_{D^*} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, f(-x,y)=f(x,y)\end{cases};$$

其中D^*为D在y轴的右半部分.

(iii) 若D关于直线$y=x$对称,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma$.

【例 8.4】设积分区域D是圆环$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,求$\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\dfrac{x}{y}+7\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】因积分域 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 关于 x 轴，y 轴对称，且函数 $2x^3$ 及 $\sin\dfrac{x}{y}$ 分别是 x,y 的奇函数，故将被积函数分项积分，得

$$\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 3\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 7\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+0+7\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由二重积分的几何意义，知 $\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-\pi=3\pi$.

故 $\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\dfrac{x}{y}+7\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=7\cdot3\pi=21\pi$.

【例 8.5】设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1+x^2}-\dfrac{1}{2}$，$x=\sqrt{1+y^2}-\dfrac{1}{2}$ 与直线 $y=-x$ 所围成的区域，D_1 是 D 在第二象限的部分，则 $\iint\limits_D(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$

(A) $2\iint\limits_{D_1}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　(D) 0

【解】作出 D 的图形如图 8-2 所示.

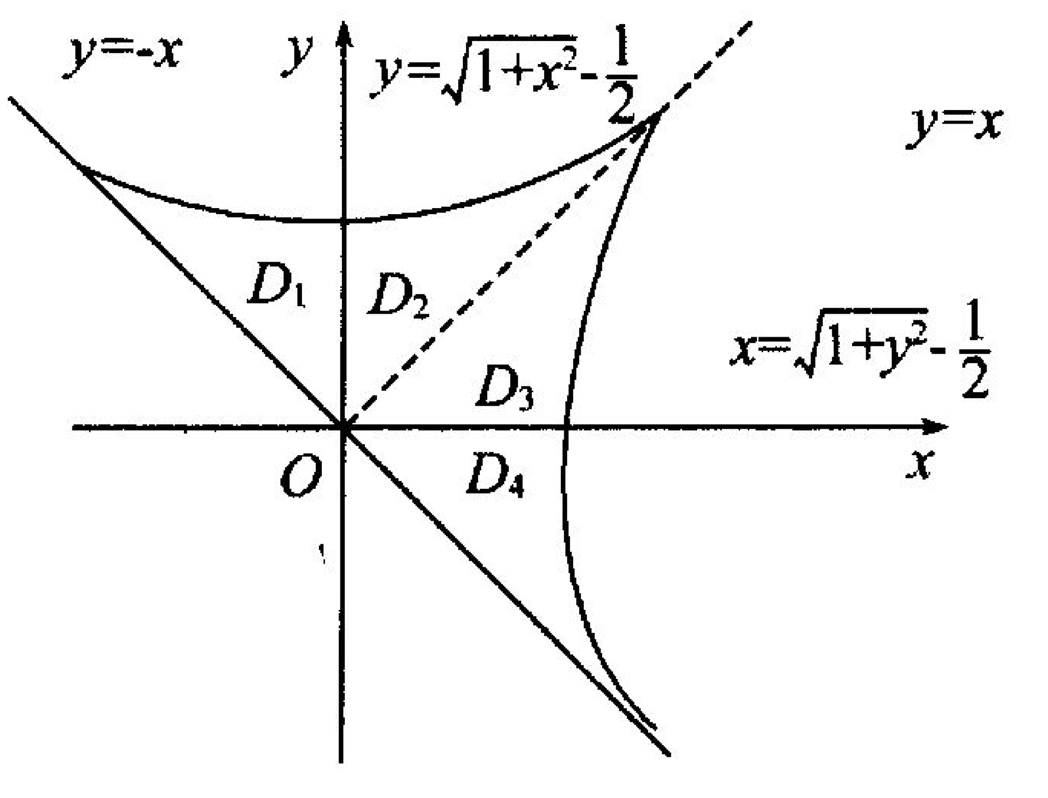


图 8-2

作辅助线 $y=x$，则 D 被分成两个子区域，而每个子区域又被坐标轴分成两个小区域，D_1 与 D_2 关于 y 轴对称，D_3 与 D_4 关于 x 轴对称，又 $x\sin y$ 是 x,y 的奇函数，所以

$$\iint\limits_{D_1+D_2}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\iint\limits_{D_3+D_4}x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

而 $y\cos x$ 是 x 的偶函数，是 y 的奇函数，

所以 $\iint\limits_{D_1+D_2}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\iint\limits_{D_3+D_4}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

故 $\iint\limits_D(x\sin y+y\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即选(B).

三、二重积分的计算

二重积分的计算一般是将二重积分化为两次单积分（即两次定积分）来计算，关键是选择合适的坐标系和恰当的积分次序. 计算二重积分常选用直角坐标系和极坐标系.

1. 利用直角坐标计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_?^?\mathrm{d}x\int_?^?f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 或 } \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_?^?\mathrm{d}y\int_?^?f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(1) 如果 D 为 X 型区域（穿过 D 内部且平行于 y 轴的直线与 D 的边界线的交点不多于两点），即 D 可用不等式 $\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$ 表示，如图 8-3，则

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$,此积分称为先对 y、后对 x 的二次积分.

注 后积分的变量先定限为 $a\leqslant x\leqslant b$,先积分的变量后定限,y 的具体定限方法如下:

在 x 的区间$[a,b]$内自下向上作一条直线 $l\,/\!/\,y$ 轴,设先与 D 的边界曲线 $y=\varphi_1(x)$ 相交,则取 $\varphi_1(x)$ 为下限;后与 D 的边界曲线 $y=\varphi_2(x)$ 相交,则取 $\varphi_2(x)$ 为上限.

(2) 如果 D 为 Y 型区域(穿过 D 内部且平行于 x 轴的直线与 D 的边界线的交点不多于两点),即 D 可用不等式 $\psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)$,$c\leqslant y\leqslant d$ 表示,如图 8-4,则

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$,此积分称为先对 x 后对 y 的二次积分.

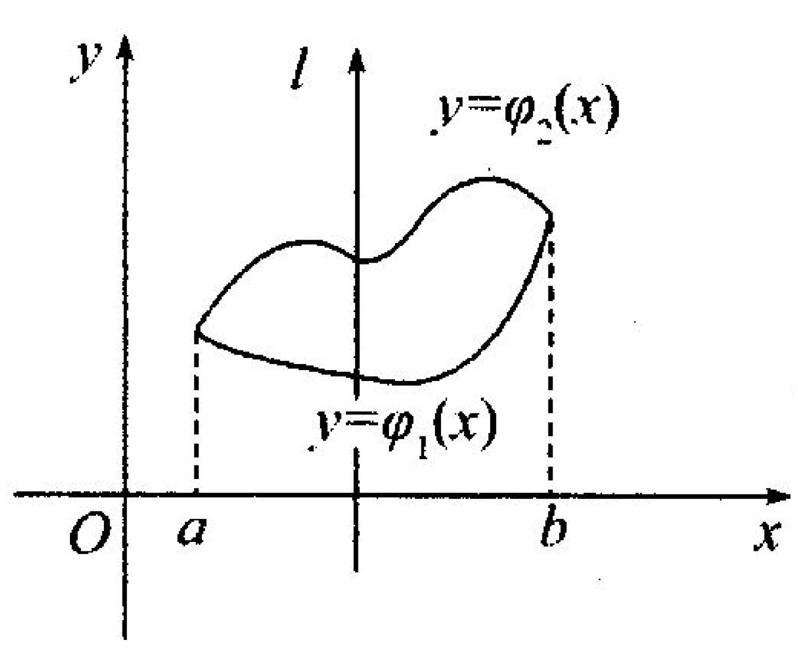


图 8-3

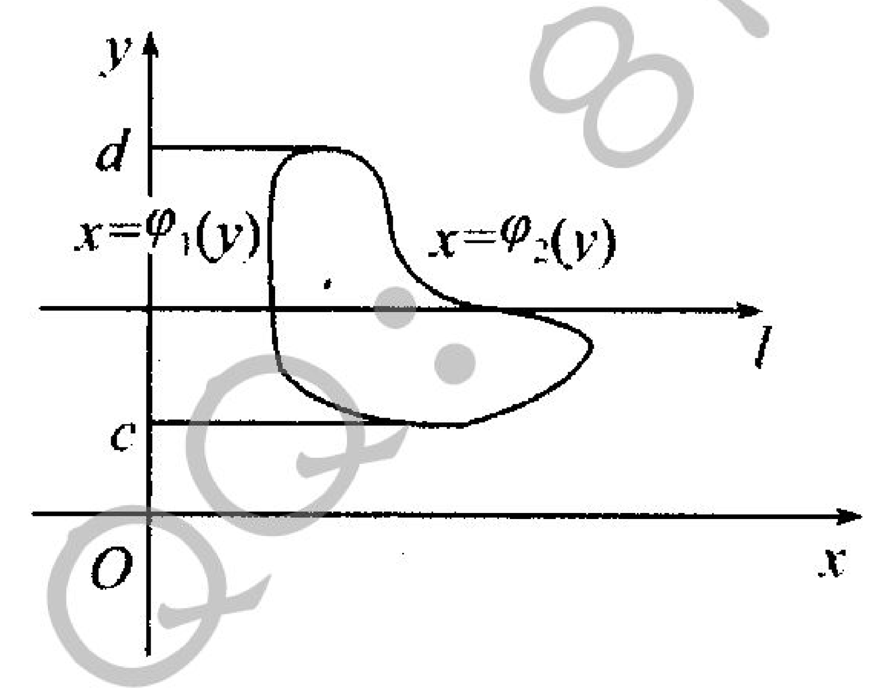


图 8-4

注 后积分的变量先定限为 $c\leqslant y\leqslant d$,先积分的变量后定限,x 的具体定限方法如下:

在 y 的区间$[c,d]$内自左向右作一条直线 $l\,/\!/\,x$ 轴,设先与 D 的边界曲线 $x=\psi_1(y)$ 相交,则取 $\psi_1(y)$ 为下限;后与 D 的边界曲线 $x=\psi_2(y)$ 相交,则取 $\psi_2(y)$ 为上限.

(3) 如果 D 既不是 X 型区域也不是 Y 型区域,则可作辅助线将 D 划分成若干个不相交的 X 型区域或 Y 型区域的闭区域,然后利用二重积分的性质,将积分区域 D 上的二重积分分解为各小闭区域上的二重积分之和.

注 ① 当 D 为折边形,如三角形,四边形,五边形等,用直角坐标系.

② 如果 D 既是 X 型区域也是 Y 型区域,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

③ 利用直角坐标计算二重积分的具体步骤如下:

(a) 画出积分区域的草图;

(b) 判断积分区域为何种类型;

(c) 化二重积分为二次积分进行计算.

【例 8.6】 计算 $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0$,$y=1$ 所围成的平面区域.

【解】 积分区域 D 如图 8-5 所示,是 Y 型区域,D:$0\leqslant y\leqslant 1$,$-\sqrt{1+y^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+y^2}$.

于是

$$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} x^2y\mathrm{d}x=\int_0^1 y\,\frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y$$

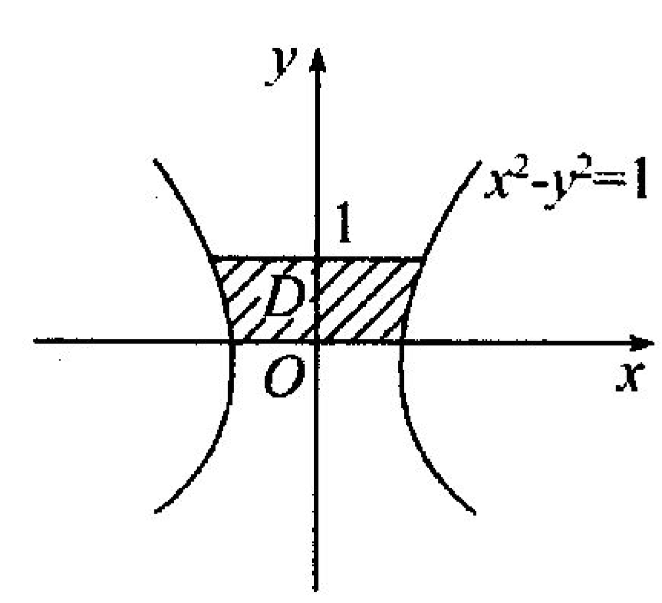


图 8-5

$$= \int_0^1 \frac{2y}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^1 (1+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1+y^2)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+y^2)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1).$$

【例 8.7】 计算 $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的区域.

【解】 积分区域如图 8-6 所示，是 X 型区域，$1\leqslant x\leqslant 2$，$\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant x$，于是

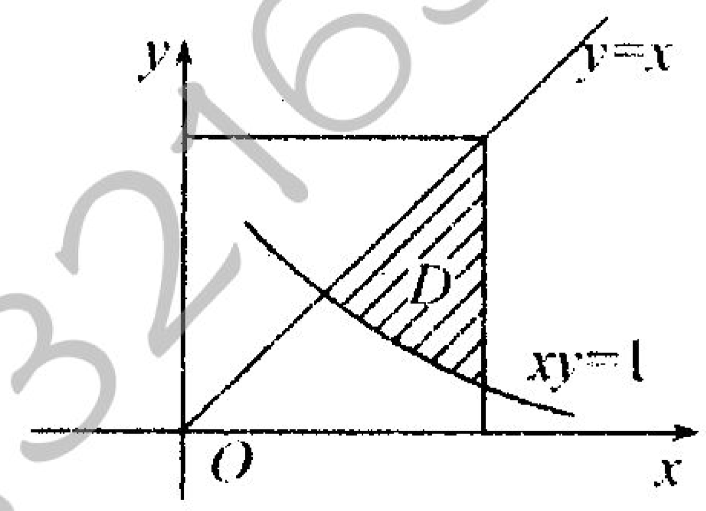


图 8-6

$$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}y = \int_1^2\left(\frac{y^3}{3x^2}\right)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3x^5}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{6}+\frac{1}{12x^4}\right)\Big|_1^2 = \frac{27}{64}.$$

【例 8.8】 计算二重积分 $\iint\limits_D (|x|+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$.

【解】 积分区域见图 8-7.

如图所示，积分区域 D 关于 x 轴，y 轴和原点对称. 而被积函数 $f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)$，其中 $f_1(x,y)=|x|$，$f_2(x,y)=y$，显然 $f_1(x,y)=|x|$ 是偶函数，$f_2(x,y)=y$ 是 y 的奇函数，于是

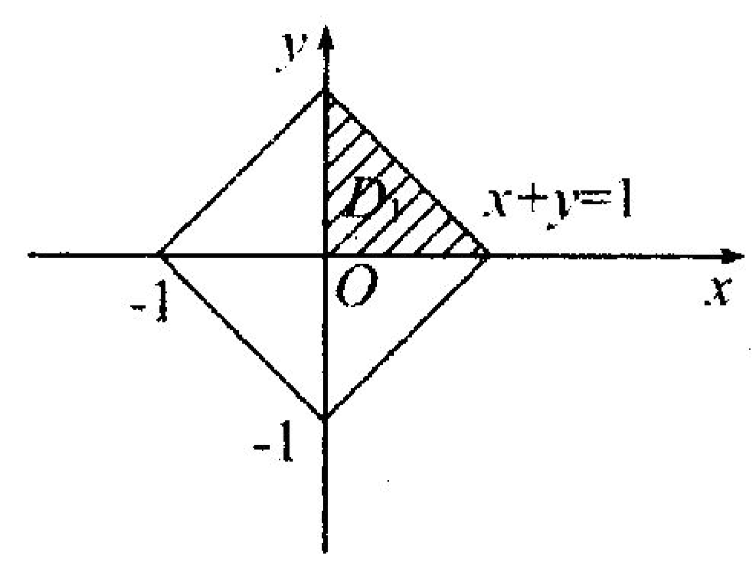


图 8-7

$$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

故 $$\iint\limits_D |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{D_1}|x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 4\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

注 D_1 既是 X 型又是 Y 型区域，所以

原积分 $= 4\iint\limits_{D_1}|x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}x\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1\frac{1}{2}(1-y)^2\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}(1-y)^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

2. 利用极坐标计算二重积分

$$I = \int_?^?\mathrm{d}\theta\int_?^? f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho = \int_?^?\mathrm{d}\rho\int_?^? f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\theta.$$

一般选择先对 ρ 后对 θ 积分，即 $I=\int_?^?\mathrm{d}\theta\int_?^? f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$，先确定极角的范围，然后确定 ρ 的范围. 根据极点，极轴和积分域的相对形状，分下面三种情况考虑.

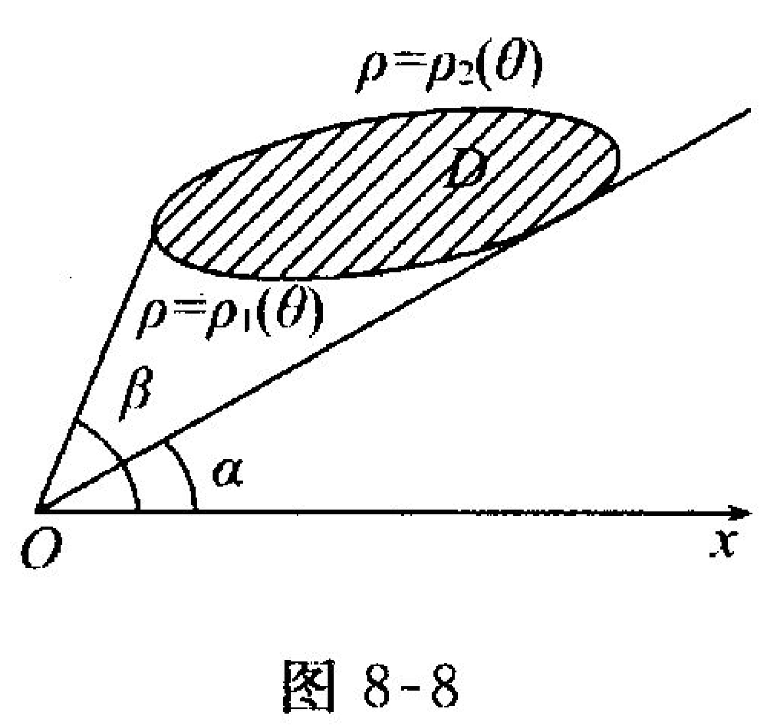


图 8-8

(1) 当极点 O 在积分域 D 的边界线外(见图 8-8).

从极点 O 作两条射线：$\theta=\alpha$，$\theta=\beta$，$\alpha<\beta$，分别与积分域 D 的边界相切，则 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$；在 α 与 β 之间从极点 O 画一条射线 L，与积分域的边界线相交，先交为下限 $\rho_1(\theta)$，后交为上限 $\rho_2(\theta)$，则 $\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta)$，于是

$$I = \int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

(2) 当极点 O 在积分域 D 的边界上(见图 8-9).

从极点 O 作两条射线：$\theta=\alpha,\theta=\beta,\alpha<\beta$，分别与边界相切，则 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$；从极点 O 画一条射线 L，与积分域 D 的边界线相交，先交为下限 0，后交为上限 $\rho(\theta)$，则 $0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)$，于是

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

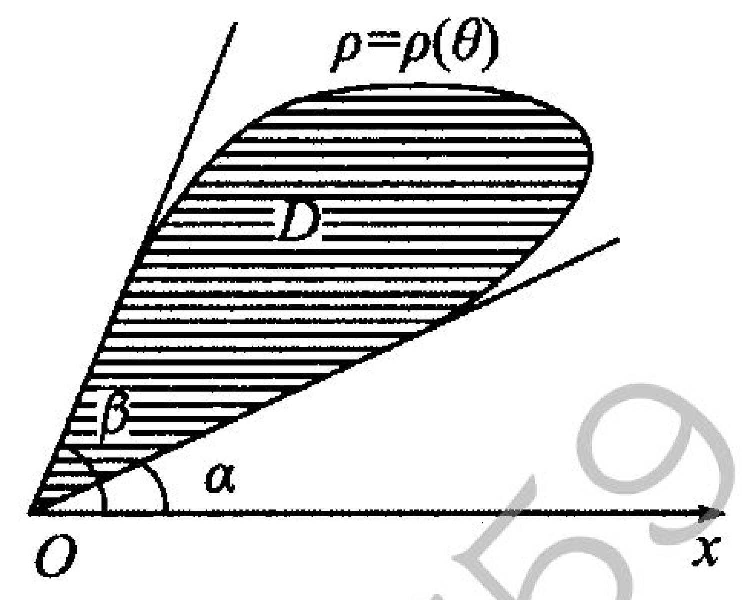


图 8-9

(3) 当极点 O 在积分域 D 的边界之内(见图 8-10).

首先可确定 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，然后从极点 O 画一条射线 L，与积分域 D 的边界线相交，先交为下限 0，后交为上限 $\rho(\theta)$，则 $0\leqslant\rho\leqslant\rho(\theta)$，于是

$$I=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\rho(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

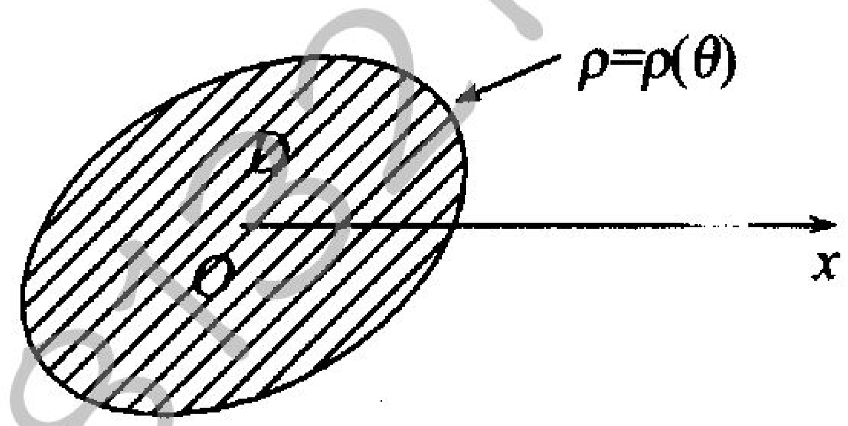


图 8-10

注 ① 当 D 为圆域，环域，扇域，环扇域等时，用极坐标系，此时，面积元素为：$\mathrm{d}\sigma=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$；

② 当 $f(x,y)$ 为 $f(x^2+y^2)$ 或 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 或 $f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 时，有时也用极坐标系.

③ 在极坐标系中，若先对 θ 积分，后对 ρ 积分，其步骤为：

ⓐ 首先画出积分区域，将积分区域的边界曲线用极坐标表示出来；

ⓑ 然后确定积分限. ρ 的积分限为常数，θ 的积分限的确定方法是：以原点 O 为圆心画一系列同心圆(逆时针方向)，同心圆与积分区域 D 的边界曲线相交，先交的曲线作为下限，后交的曲线作为上限.

3.直角坐标变换为极坐标的变换公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,$$

其中平面上点 P 的直角坐标与其极坐标的关系为：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}.$$

【例 8.9】 计算二重积分 $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,D=\left\{(x,y)\mid\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}\right\}$.

【解】 积分区域如图 8-11.

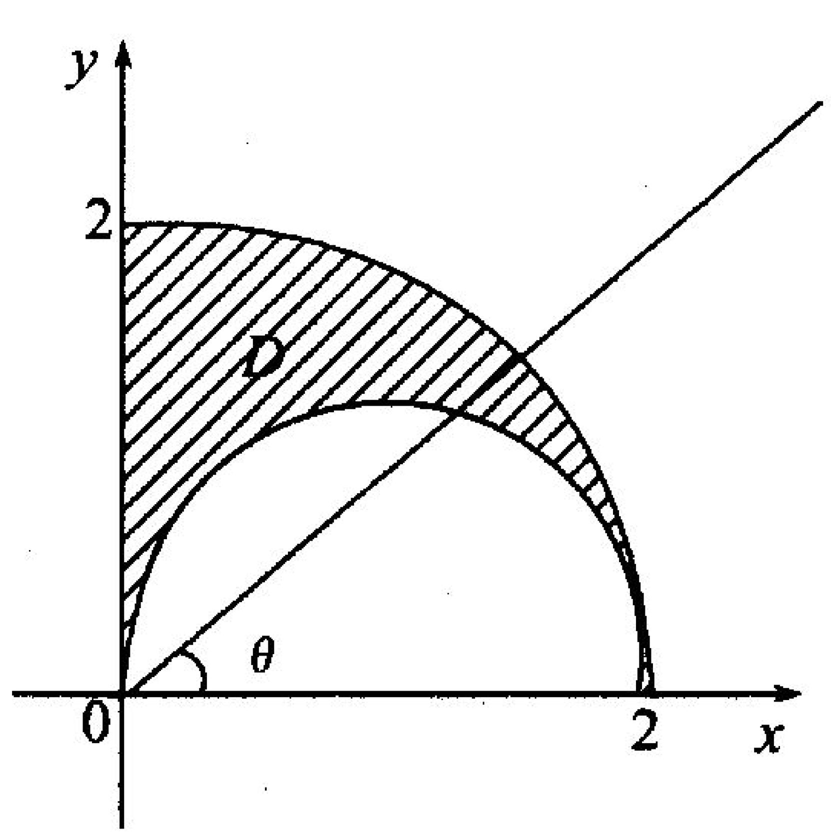


图 8-11

$\sqrt{2x-x^2}=y\Rightarrow 2\rho\cos\theta=\rho^2\Rightarrow\rho=2\cos\theta,$

$\sqrt{4-x^2}=y \Rightarrow \rho=2.$

所以积分区域为：$2\cos\theta \leqslant \rho \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$，故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{5\pi}{4}.$$

【例 8.10】 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解】 积分区域 D 如图 8-12 所示.

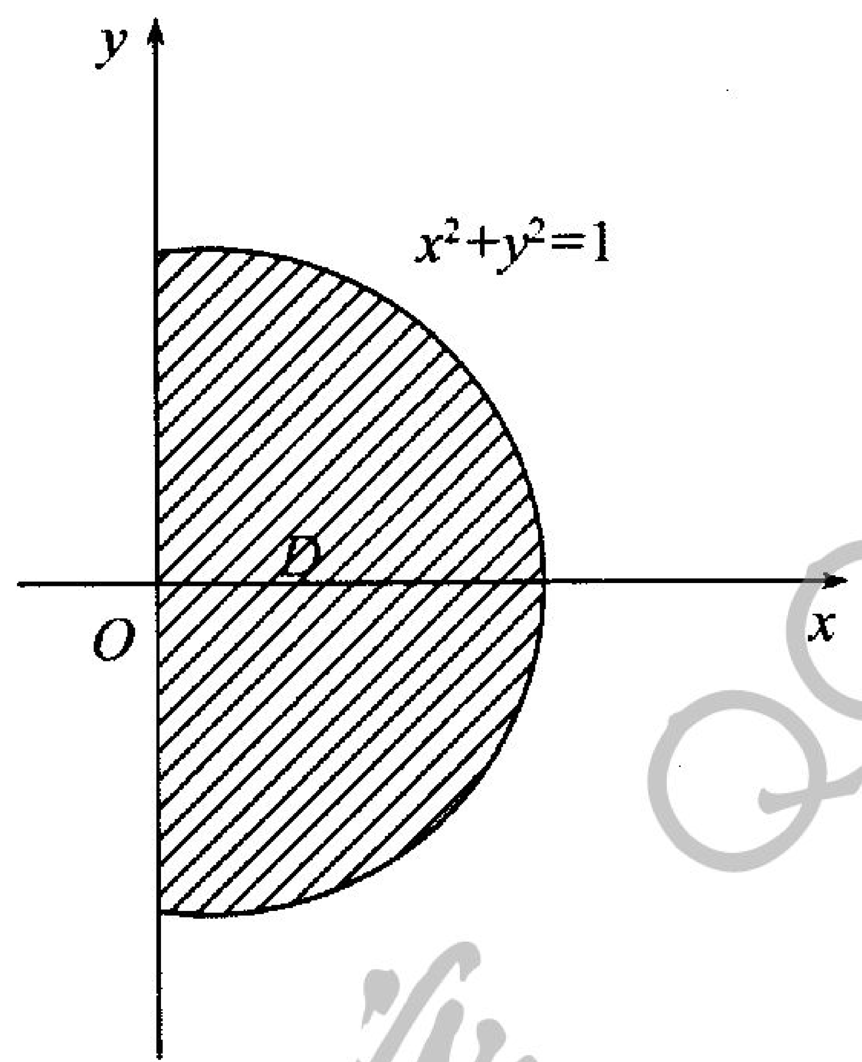


图 8-12

因为区域 D 关于 x 轴对称，函数 $f(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ 是变量 y 的偶函数，函数

$$g(x,y)=\frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

是变量 y 的奇函数. 则

$$\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi\ln 2}{2},$$

$$\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

故 $$\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

4. 被积函数 $f(x,y)$ 中含 $\mathrm{e}^{\pm x^2}, \sin x^2, \cos x^2, \mathrm{e}^{\pm\frac{1}{x}}, \sin\frac{1}{x}, \cos\frac{1}{x}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}$ 的二重积分

计算方法如下：

一般先对 y 积分，后对 x 积分；对含变量 y 的类似函数的情形则先对 x 积分，后对 y 积分.

【例 8.11】 计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=1$ 及 y 轴所围成的平面区域.

(2) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{e}^{xy}}{x^x-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=\ln x$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面区域.

【解】 (1) 积分区域如图 8-13.

被积函数中含 e^{-y^2}，所以应对 y 后积分.

故 $I=\iint\limits_D x^2e^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 y^2e^{-y^2}\mathrm{d}(y^2)\overset{t=y^2}{=}\frac{1}{6}\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}(-te^{-t}-e^{-t})\Big|_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}.$$

(2) 积分区域如图 8-14.

$$I=\iint\limits_D\frac{e^{xy}}{x^x-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{e^{xy}}{e^{x\ln x}-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{1}{e^{x\ln x}-1}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}e^{xy}\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2\frac{1}{e^{x\ln x}-1}\cdot\left(\frac{1}{x}e^{xy}\right)\Big|_0^{\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{e^{x\ln x}-1}\cdot\frac{e^{x\ln x}-1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_1^2=\ln 2.$$

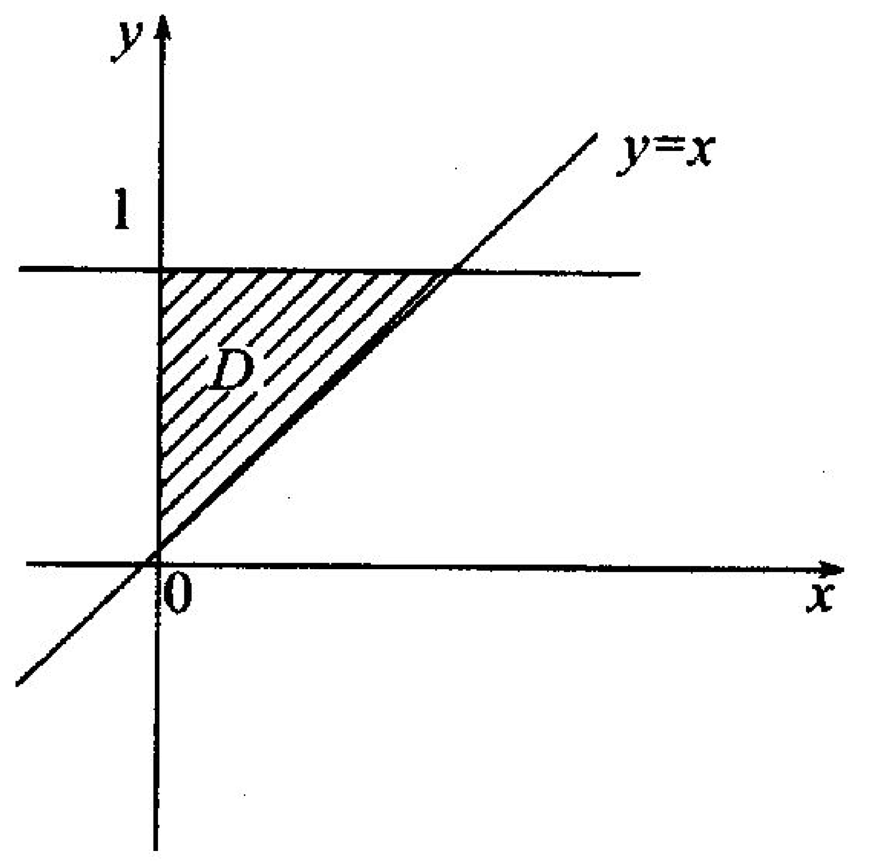


图 8-13

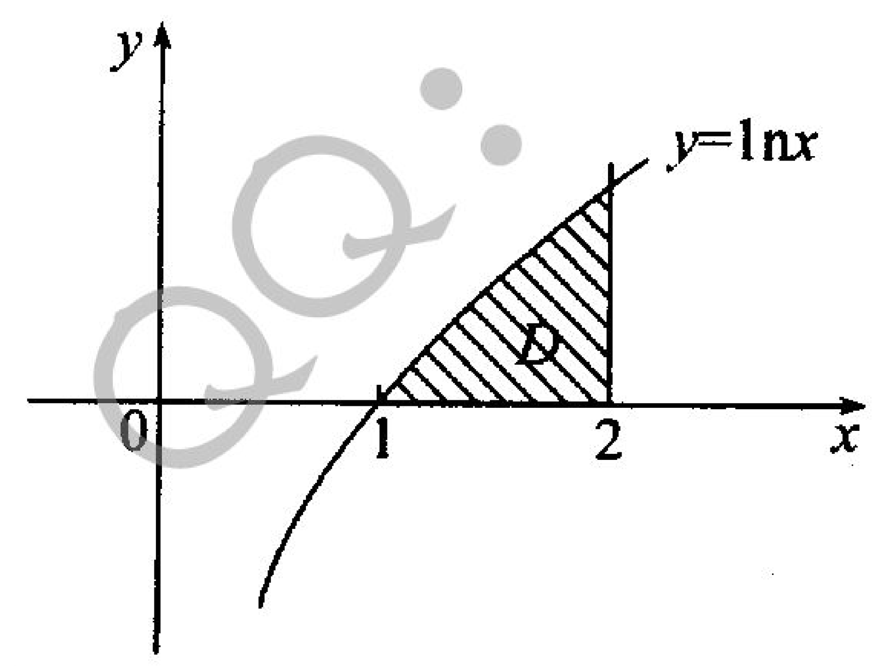


图 8-14

5. 交换二次积分的次序

(1) 由给出的累次积分的上下限写出积分域 D 所满足的不等式组；

(2) 由该不等式组画出积分域 D 的草图；

(3) 写出新的积分次序，然后按定限口诀确定新的累次积分上下限.

【例 8.12】 更换下列积分的积分次序.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\frac{\pi y}{2}}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

【解】 (1) 由题可知，$0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，$y\leqslant x\leqslant\sqrt{\frac{\pi y}{2}}$，积分域草图如图 8-15 所示，

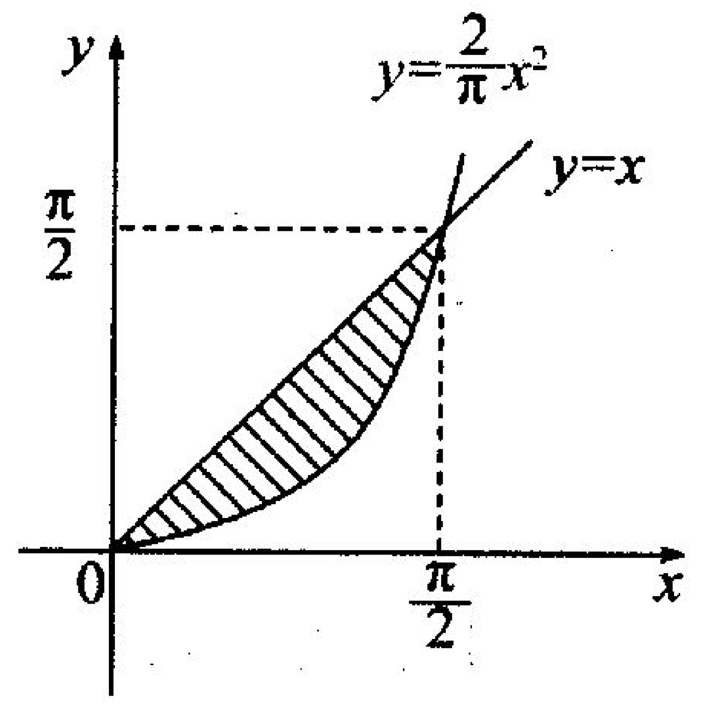


图 8-15

则
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{\frac{\pi y}{2}}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{2}{\pi}x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y.$$

(2) 由题可知，$0<y<1$，$1-\sqrt{1-y^2}<x<2-y$，积分域草图如图 8-16 所示.

则作辅助线 $x=1$ 将 D 分为两个 X 型区域 D_1 和 D_2，即 $D=D_1\cup D_2$，且

$D_1: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{2x-x^2}$，$D_2: 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2-x$.

于是 $$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

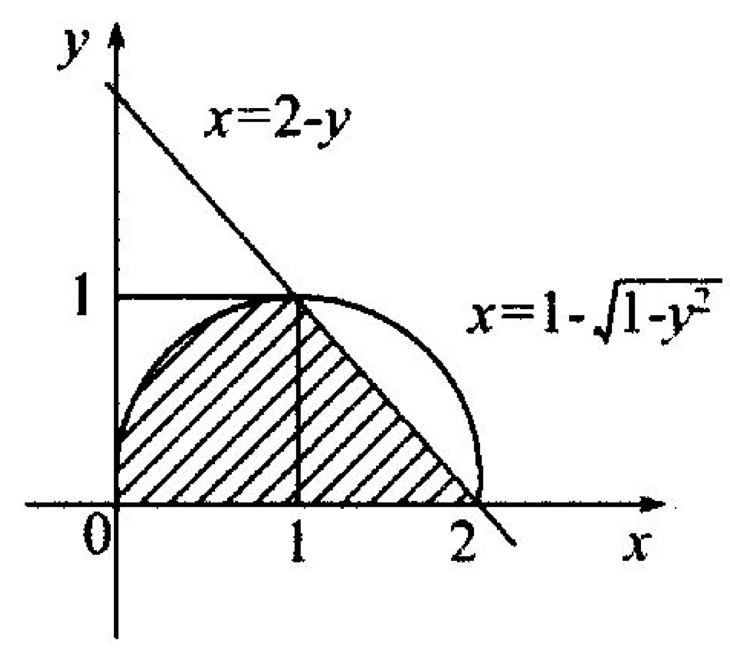


图 8-16

【例 8.13】设函数 $f(x,y)$ 连续，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

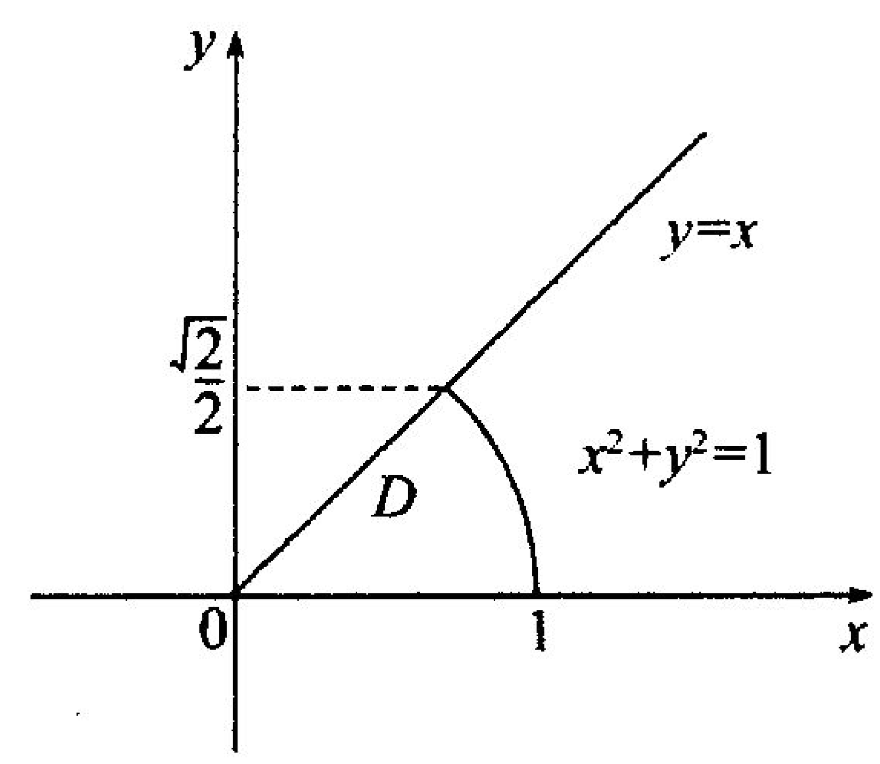


图 8-17

【解】由题设可知积分区域 D 如图 8-17 所示.

积分区域显然是 Y 型区域，$0\leqslant y\leqslant\sqrt{2}, y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$，则

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

故选(C).

四、分段函数的二重积分

被积函数是分段函数时，应根据分段函数的表达式将积分区域划分为若干个子区域，使得在每个子区域上，被积函数的表达式唯一；然后利用二重积分对积分区域的可加性

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \cdots + \iint_{D_k} f(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $D = D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_k$，且 $D_i\cap D_j = \varnothing\,(i\neq j)$.

【例 8.14】(1) $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

D 由 $x+y=a, x+y=b, y=0, y=a+b\,(b>a>0)$ 所围成.

(2) $\iint_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的区域.

(3) $\iint\limits_D \sin x \sin y \max\{x,y\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$.

【解】(1) 积分区域如图 8-18 所示，$D=D_1+D_2+D_3$，在 D_1 上，$f(x,y)=0$，

$$\text{故} \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_2} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_3} \mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \int_{a-x}^{b-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y + \int_a^b \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \int_0^{b-x} \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y$$

$$= (a+1)\mathrm{e}^{-a} - (b+1)\mathrm{e}^{-b}.$$

(2) 积分区域如图 8-19.

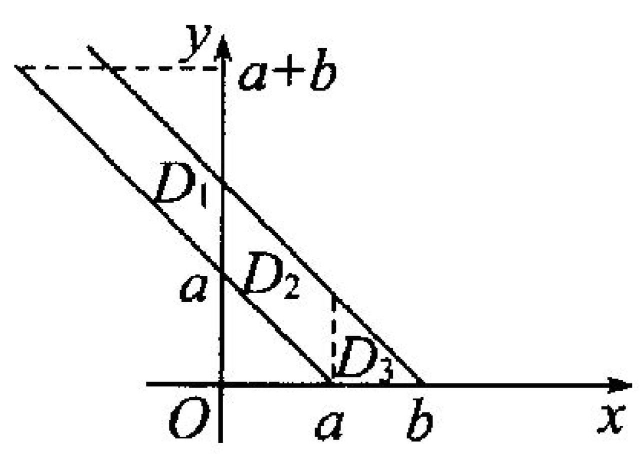


图 8-18

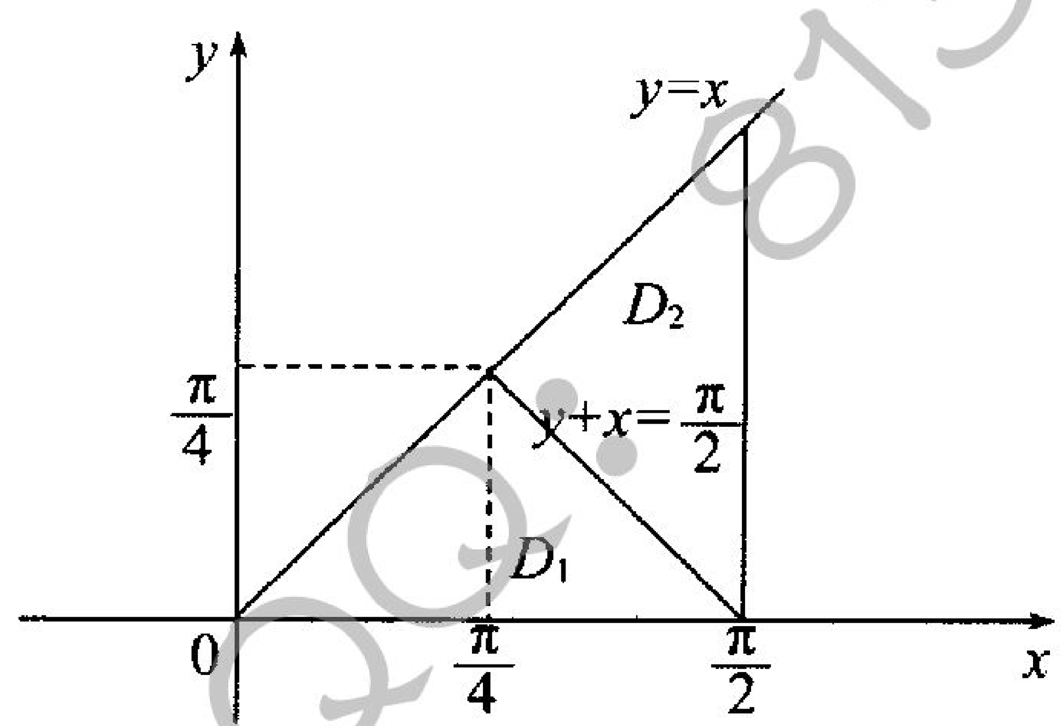


图 8-19

为去掉被积函数中的绝对值，需用 $\cos(x+y)=0$ 的曲线，即直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 将区域 D 划分为两部分 D_1 和 D_2，再将二重积分分别转化为二次积分.

在 D_1 上，$|\cos(x+y)|=\cos(x+y)$；在 D_2 上，$|\cos(x+y)|=-\cos(x+y)$.

$$\text{故} \iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_2} \cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}y \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y)\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{x} \cos(x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin 2y)\mathrm{d}y - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - 1)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(3) 积分区域如图 8-20 所示. 积分域 $D=D_1+D_2$，则

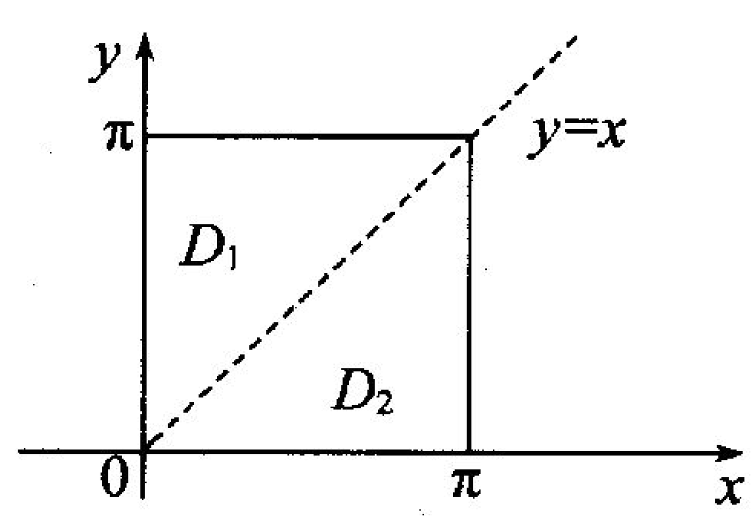


图 8-20

$$\iint\limits_D \sin x \sin y \max\{x,y\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} y\sin x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} x\sin x \sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} y\sin y\mathrm{d}y \int_0^{y} \sin x\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x \int_0^{x} \sin y\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\pi} y\sin y\mathrm{d}y \int_0^{y} \sin x\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{2}.$$

8.2　三重积分(数二不作要求)

一、概念

与二重积分类似，设 $f(x,y,z)$ 是空间闭区域 Ω 的有界函数，若极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

注 ① 若 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 存在；

② 三重积分的物理意义：设一物体的形状为 Ω，在 Ω 中的任一点处的体密度为 $f(x,y,z)$，且 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上连续，则该物体的质量为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$.

二、直角坐标系下三重积分的计算

(1)(适用情况) 若 Ω 为长方体，四面体或任意形体，则用直角坐标系计算会简便，此时，体积元素 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) 化为累次积分时，需根据 Ω 具体形状，确定 Ω 在哪个坐标面投影.

① 若平行于某坐标轴(不妨设为 z 轴) 的直线穿过 Ω 的内部，与 Ω 的边界曲面的交点不多于两个，Ω 的上顶曲面函数为 $z_2(x,y)$，下顶曲面函数为 $z_1(x,y)$，在 xOy 坐标面的投影区域为 D，即

$$\Omega \text{ 可表示为}\begin{cases} z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y) \\ (x,y)\in D \end{cases}\text{时},$$

则先对 z 积分，然后对 x,y 积分.

故 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{1}$$

(1) 式称为计算三重积分的“先一后二”法.

在求二重积分时，根据 D 为 X 型区域或 Y 型区域进行计算. 即

ⓐ 若 D 为 X 型区域，即 $\begin{cases} y_1(x)<y<y_2(x) \\ a<x<b \end{cases}$，

则(1) 式可进一步化为 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

ⓑ 若 D 为 Y 型区域，即 $\begin{cases} x_1(y)<x<x_2(y) \\ c<y<d \end{cases}$，

则(1) 式可进一步化为 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\mathrm{d}x\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

(2) 式与(3) 式均为计算三重积分的三次积分.

【例 8.15】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+y+z=1$ 所围成的区域.

【解】Ω 的草图如图 8-21.

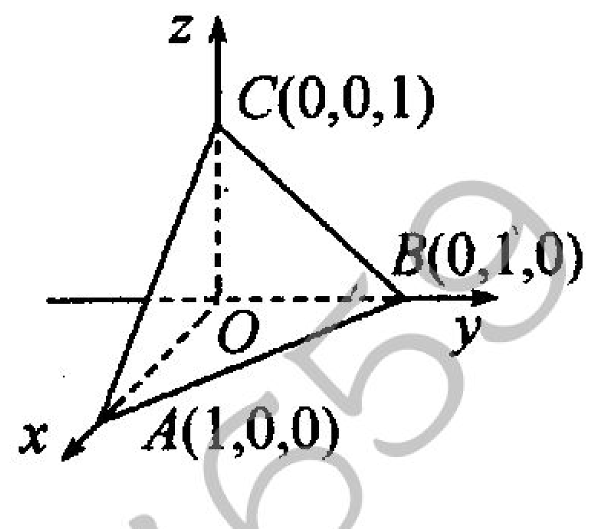


图 8-21

因为被积函数 $f(x,y,z)=x+y+z$ 及积分域关于 x,y,z 均具有轮换对称性，故

$$\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

所以 $I=3\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

将 Ω 投影到 xOy 坐标面上，则

$$D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,x>0,y>0\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\},$$

于是 $\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant 1-x-y\\(x,y)\in D\end{cases}=\begin{cases}0\leqslant z\leqslant 1-x-y\\0\leqslant y\leqslant 1-x\\0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$（先一后二法），

故 $$I=3\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z=3\int_0^1x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{3}{2}\int_0^1x(1-x-y)^2\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int_0^1x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}.$$

② 若 Ω 可表示为 $\begin{cases}(x,y)\in D_z\\c_1\leqslant z\leqslant c_2\end{cases}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

(4) 式称为计算三重积分的"先二后一"法或截面法. 当被积函数与 x,y 无关且积分域 Ω 夹于两平面 $z=c_1,z=c_2(c_1<c_2)$ 之间时，用界于两平面间的平面去截 Ω 得截面 D_z. 积分 $\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 容易计算时，用截面法比较简单.

【例 8.16】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成.

【解】被积函数与 x,y 无关，考虑用"先二后一法".

由于 $\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\\-c\leqslant z\leqslant c\end{cases}$，所以

$$I=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-c}^{c}z^2\cdot\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi ab\int_0^cz^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

【例 8.17】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲线 $y^2=2z,x=0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z=2,z=8$ 所围成的立体.

【解】曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转曲面的方程为 $x^2+y^2=2z$.

设 $2 \leqslant z \leqslant 8$，则 $D(z): x^2+y^2 \leqslant 2z$.

虽然 $f(x,y,z)=x^2+y^2$ 不易写成 z 的函数，但 $\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 易用极坐标写成 z 的函数，故用"先二后一"法计算.

$$I=\int_2^8 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_2^8 z^2\mathrm{d}z=336\pi.$$

③ 将 Ω 投影于 yOz，zOx 坐标面的情况类似处理.

④ 如果平行于坐标轴，穿过 Ω 的内部的直线交 Ω 的边界曲面的点多于两个，则将 Ω 分割成若干不相交的闭区域，使每个小闭区域满足条件（即平行于坐标轴，穿过每个小闭区域的内部的直线交其边界曲面的点不多于两个），然后利用三重积分的性质，将积分区域 Ω 上的三重积分分解为各小闭区域上的三重积分之和.

三、柱坐标系下三重积分的计算

(1)（适用情况）若 Ω 是由旋转面、柱面、锥面与平面所围，积分域 Ω 在 xOy 面上的投影是圆或圆的一部分，或被积函数为 $zf(x^2+y^2)$，$zf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 或简单的一、二次式，则用柱面坐标系 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\\ z=z\end{cases}$，此时，体积元素 $\mathrm{d}v=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

(2) 柱面坐标系下三重积分的计算本质是直角坐标系下的"先一后二"法，即若

$\Omega: \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta, \rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta), z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)$，

则
$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}^{z_2(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

【例 8.18】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围第一卦限部分.

【解】 $\Omega:\begin{cases}0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\\ (x,y)\in D\end{cases}$（先一后二）$=\begin{cases}0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}\\ 0\leqslant\rho\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

故
$$\iiint\limits_{\Omega}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}xy\cdot\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot(1-\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^3-\rho^5)\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin^2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{48}.$$

【例 8.19】 计算 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Omega$ 由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$，$z=x^2+y^2$ 围成.

【解】 凡积分域是由抛物面与其他曲面所围成的形体，一般采用柱坐标系计算为宜. 在柱坐标系

下，球面与抛物面的交线为

$$\begin{cases} z = \sqrt{2-\rho^2} \\ z = \rho^2 \end{cases}，即 \begin{cases} z = 1 \\ \rho = 1 \end{cases}.$$

于是

$$\Omega: \begin{cases} \rho^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-\rho^2} \\ 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases},$$

所以

$$I = \iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi\int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5)\mathrm{d}\rho = \pi\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7\pi}{12}.$$

四、球坐标系下三重积分的计算

(1)(适用情况) 若 Ω 是由锥面、球面与平面所围，或被积函数为 $f(x^2+y^2+z^2)$ 时，用球面坐标系 $\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，

此时，体积元素 $\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

(2) 积分次序通常是先对 r 积分，把区域 Ω 投影到 $r=1$(或常数) 的球面上，得到投影区域 $\sigma_{\varphi\theta}$，它的边界曲线由 φ,θ 的关系确定. 从原点引一条射线，穿过 Ω 内部，设先与之相交的曲面方程为 $r_1(\varphi,\theta)$，后与之相交的曲面方程为 $r_2(\varphi,\theta)$，则

$$\Omega: \begin{cases} r_1(\varphi,\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi,\theta) \\ (\varphi,\theta) \in \sigma_{\varphi\theta} \end{cases}.$$

故积分可表示为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{\sigma_{\varphi\theta}} \sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\mathrm{d}r$$

$$= \int_{\square}^{\square}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\square}^{\square}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\mathrm{d}r.$$

关于第一个积分 $\int_{\square}^{\square}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$，积分限如下确定：

(i) 若 z 轴从积分域 Ω 中穿过，则 $\int_{\square}^{\square}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$.

(ii) 若 z 轴与积分域 Ω 相离或相切，则总可以找到两个半锥角分别为 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ 的锥面，把 Ω 夹在其中，于是 $\int_{\square}^{\square}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \int_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$.

关于第二个积分 $\int_{\square}^{\square}\mathrm{d}\theta$，积分限的确定与极坐标系中 θ 的确定类似，即若积分域 Ω 在平面 xOy 上投影后区域的边界曲线包含原点在内，则 $\int_{\square}^{\square}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$；若投影区域的边界曲线不包含原点在内，则在 xOy 面上总可以作两条射线把投影区域夹住，若射线与 x 轴正向的夹角分别为 θ_1，$\theta_2(\theta_1<\theta_2)$，于是 $\int_{\square}^{\square}\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta$.

【例 8.20】求$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}}\mathrm{d}V$，$\Omega$ 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 的第一象限部分.

【解】本题显然用球坐标系，则 $\Omega:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant \varphi\leqslant \dfrac{\pi}{2}\\ 0\leqslant \theta\leqslant \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sin\varphi\cos\theta\cdot\mathrm{e}^{\frac{r^2}{a^2}}\cdot r^2\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{e}^{\frac{r^2}{a^2}}\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^a r^2\mathrm{e}^{\frac{r^2}{a^2}}\mathrm{d}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)=\frac{\pi}{8}a^4.\end{aligned}$$

【例 8.21】求$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V$，$\Omega$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围形体.

【解】$z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$z=1\Rightarrow r\cos\varphi=1\Rightarrow r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. 于是 $\Omega:\begin{cases}0\leqslant r\leqslant \dfrac{1}{\cos\varphi}\\ 0\leqslant \varphi\leqslant \dfrac{\pi}{4}\\ 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi\end{cases}$.

$$\begin{aligned}\text{故 } I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r\cdot r^2\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi\\&=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4\varphi}\mathrm{d}(\cos\varphi)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{\cos^3\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

五、利用对称性或轮换对称性化简三重积分

1. 利用对称性化简三重积分

(1) 若积分域 Ω 关于坐标面 xOy（或 yOz，或 zOx）对称，$f(x,y,z)$ 是 z（或 x，或 y）的奇函数，则积分 $I=0$；若 $f(x,y,z)$ 是 z（或 x，或 y）的偶函数，则积分 $I=2\iiint\limits_{\Omega^*}f(x,y,z)\mathrm{d}V$，其中 Ω^* 是 Ω 的对称区域的一半.

(2) 若积分域 Ω 关于 x（或 y，或 z）轴对称，$f(x,y,z)$ 是 y,z（或 x,z，或 x,y）的奇函数，则积分 $I=0$；若 $f(x,y,z)$ 是 y,z（或 x,z，或 x,y）的偶函数，则积分 $I=2\iiint\limits_{\Omega^*}f(x,y,z)\mathrm{d}V$，其中 Ω^* 是 Ω 的对称区域的一半.

(3) 若积分域 Ω 关于原点对称，$f(x,y,z)$ 关于 x,y,z 为奇函数（即 $f(x,y,z)=-f(-x,-y,-z)$），则积分 $I=0$；若 $f(x,y,z)$ 关于 x,y,z 为偶函数（即 $f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$），则积分 $I=2\iiint\limits_{\Omega^*}f(x,y,z)\mathrm{d}V$，其中 Ω^* 是 Ω 的对称区域的一半.

【例 8.22】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

【解】由图 8-22 可知，

Ω 关于坐标面 yOz 对称，又 $f(x,y,z)=x$ 关于 x 为奇函数，于是

$$\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}V=0.$$

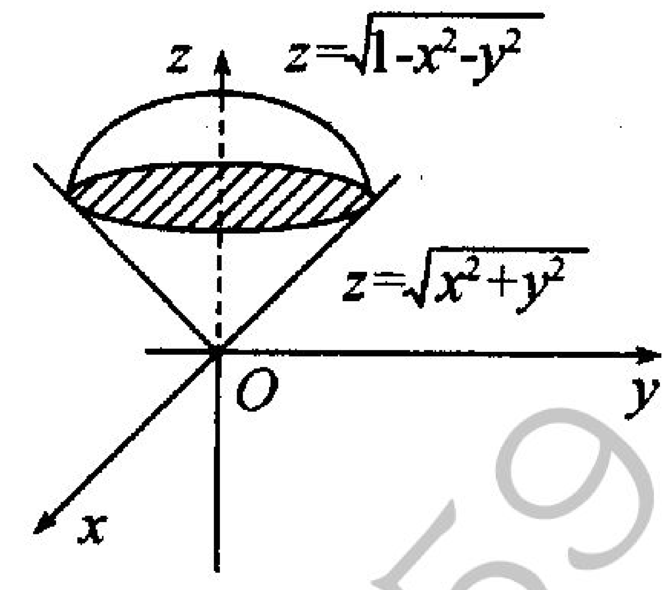


图 8-22

故 $I=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

【例 8.23】计算 $I=\iiint_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

【解】$I=\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}V+\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}V+\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V$，

因 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 关于原点对称，又 $f(x,y,z)=x,f(x,y,z)=y,f(x,y,z)=z$ 分别为 x,y,z 的奇函数，

所以 $$I=\iiint_\Omega(x+y+z)\mathrm{d}V=0+0+0=0.$$

2. 利用轮换对称性化简三重积分

当积分区域 Ω 或被积函数表达式中将变量 x,y,z 换为 z,x,y 时表达式仍不变，则称积分域或被积函数关于变量 x,y,z 具有轮换对称性，此时积分有如下性质：

$$\iiint_\Omega f(x)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega f(y)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega f(z)\mathrm{d}V.$$

【例 8.24】计算 $I=\iiint_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}V$，其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

【解】因为 $f(x,y,z)=(x+y+z)^2$ 及 Ω 关于变量 x,y,z 均具有轮换对称性，所以

$$I=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V+2\iiint_\Omega(xy+yz+zx)\mathrm{d}V$$

$$=3\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}V+6\iiint_\Omega xy\mathrm{d}V.$$

而 $\iiint_\Omega xy\mathrm{d}V=0$，($xy$ 为 x,y 的奇函数，Ω 关于 xOy 面对称)

所以 $$I=3\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}V=3\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\sin\varphi\cdot r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

8.3 重积分的应用

一、求体积

(1) 利用二重积分的几何意义. 若 $f(x,y)\geqslant 0$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示由曲面 $\Sigma:z=f(x,y)$ 为顶，母线平行于 z 轴的柱面，即由曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影 D 为底 Σ 为顶所围的曲顶柱体体

积 V,即 $V=\iint\limits_D z\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

(2) 当立体由上下两个曲面相夹而成时,如图 8-23. 设立体的上顶为曲面 $z=f(x,y)$,下底是曲面 $z=g(x,y)$,且 $f(x,y)\geqslant g(x,y)$. 立体在 xOy 平面的投影为 D,则立体的体积为

$$V=\iint\limits_D[f(x,y)-g(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

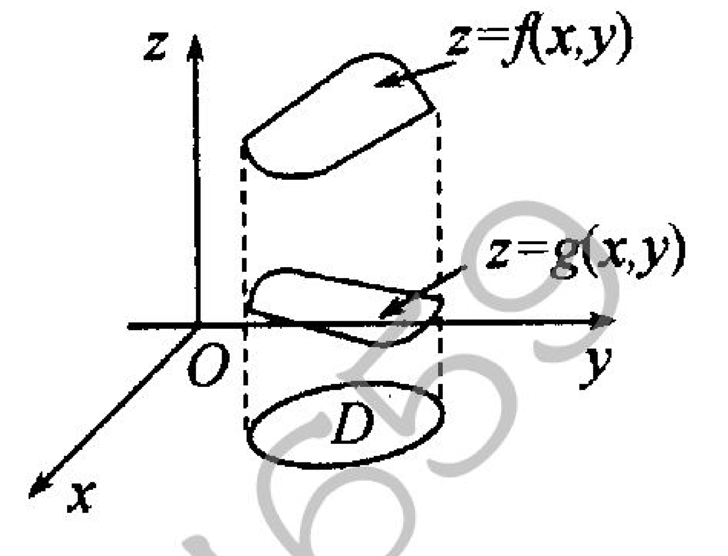


图 8-23

【例 8.25】求三个坐标平面与平面 $\Pi:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 所围封闭立体的体积,其中 a,b,c 为正常数.

【解】根据题意得平面 $\Pi:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 与三个坐标轴的交点是

$$(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c).$$

如图 8-24 所示,该立体在 xOy 坐标平面的投影为三角形区域 D:由 x 轴、y 轴以及直线 $l:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 所围成,见图 8-25,区域 D 可以表示为

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant x\leqslant a\left(1-\frac{y}{b}\right)\right\}.$$

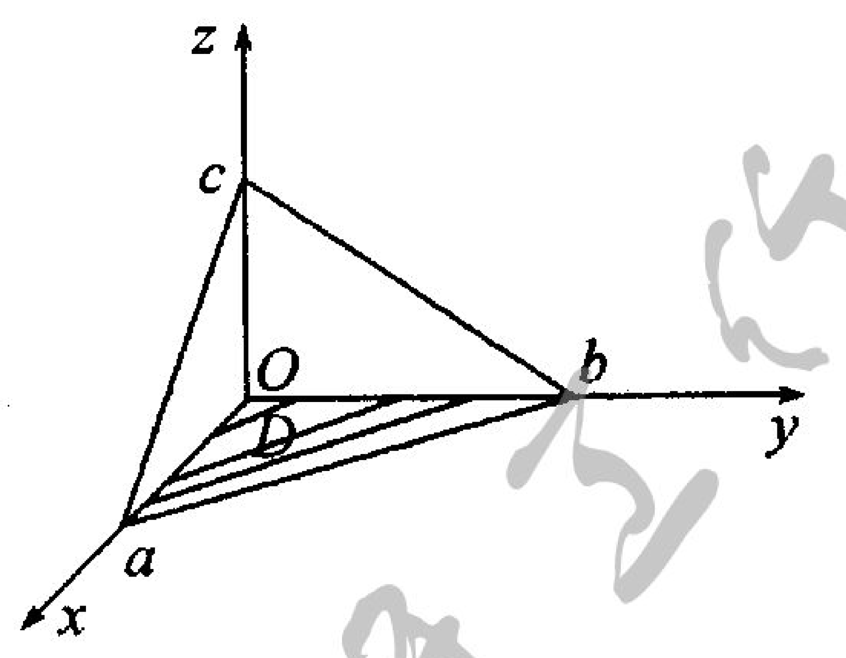


图 8-24

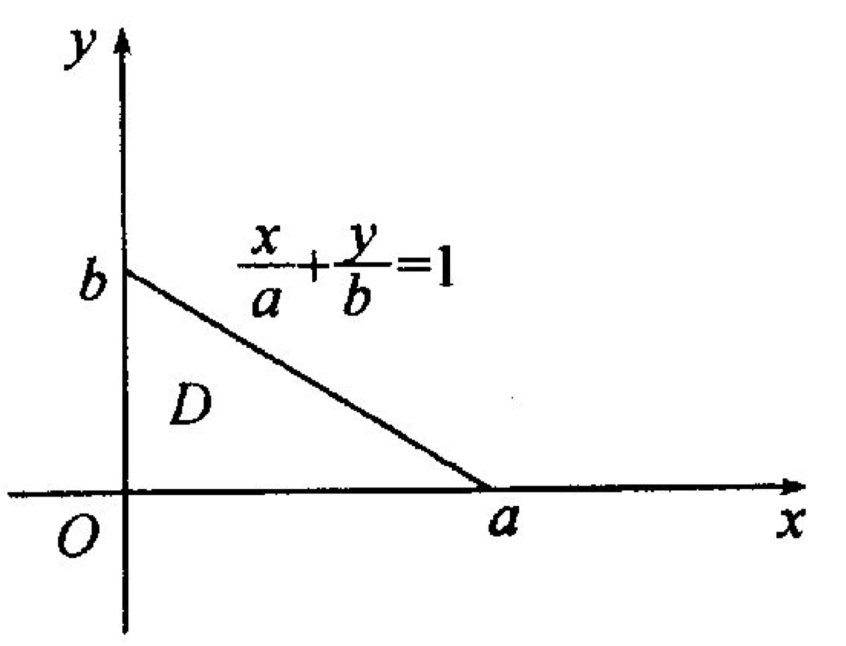


图 8-25

根据二重积分的几何意义可知所求立体的体积为:

$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_D z\mathrm{d}\sigma=c\iint\limits_D\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}\sigma\\&=c\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^{a(1-\frac{y}{b})}\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\mathrm{d}x\\&=c\int_0^b\left[x-\frac{x^2}{2a}-\frac{xy}{b}\right]_0^{a(1-\frac{y}{b})}\mathrm{d}y\\&=\frac{ac}{2}\int_0^b\left[1-\frac{y}{b}\right]^2\mathrm{d}y\\&=-\frac{abc}{6}\left(1-\frac{y}{b}\right)^3\Big|_0^b=\frac{abc}{6}.\end{aligned}$$

【例 8.26】求曲面 $z=x^2+y^2+a(a>0)$ 上任意一点处的切平面与 $z=x^2+y^2$ 所围成的空间的体积.

【解】设曲面 $\Sigma:z=x^2+y^2+a$ 上任意一点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,则过点 M_0 的切平面方程为

$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

即 $z=2x_0x+2y_0y-x_0^2-y_0^2+a$. 显然切平面位于 $z=x^2+y^2$ 上方,

故 $V=\iint\limits_{D_{xy}}(2x_0x+2y_0y-x_0^2-y_0^2+a-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iint\limits_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant a}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-a]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x-x_0=\rho\cos\theta, y-y_0=\rho\sin\theta$,

则

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a}}\rho\cdot(-\rho^2+a)\mathrm{d}\rho=\pi a^2.$$

二、求曲面面积

求曲面面积关键是找被积函数和投影区域. 一般被积函数在第一个曲面方程中找,投影区域为两个曲面共同投影的部分. 请记住以下公式.

(1) 设曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$ 与平行于 z 轴的直线只交于一点,曲面 Σ 在 xOy 平面上的投影为 D,则曲面 Σ 的面积 A 为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 如果曲面 $\Sigma: y=y(x,z)$ 与平行于 y 轴的直线只交于一点,曲面 Σ 在 zOx 平面上的投影为 D,则曲面 Σ 的面积 A 为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

(3) 如果曲面 $\Sigma: x=x(y,z)$ 与平行于 x 轴的直线只交于一点,曲面 Σ 在 yOz 平面上的投影为 D,则曲面 Σ 的面积 A 为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+x'^2_y+x'^2_z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【例 8.27】 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

【解】 将割下部分的曲面在 xOy 平面上投影,联立 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z^2=2x\end{cases}$ 消去 z 得 $x^2+y^2=2x$.

故投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\ z=0\end{cases}$.

又 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

于是 $$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi.$$

三、求薄片或形体的质量、质心的坐标、转动惯量、引力

1 记住以下公式.

(1) 设平面薄片 D 的面密度 $\mu=f(x,y)$,则

(i) 薄片 D 的质量 $M=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$;

(ii) 薄片 D 的重心(质心) $\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma},\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D yf(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$;

(iii) 薄片 D 关于 x,y 轴及关于原点的转动惯量分别为:

$J_x=\iint\limits_D y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,J_y=\iint\limits_D x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,J_O=\iint\limits_D (x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(2) 设空间形体体密度为 $\rho(x,y,z)$,

(i) 空间形体 Ω 的质量 $M=\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(ii) 空间形体 Ω 的重心(质心)

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\bar{y}=\frac{\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z};$$

(iii) 空间形体 Ω 关于 x,y,z 轴及关于原点的转动惯量分别为:

$$J_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,J_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,J_O=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【例 8.28】 设有一半径为 R 的球体,P_0 是此球表面上的一个定点,球体上任意一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比(比例常数 $k>0$),求球体的重心位置.

【解】 设所考虑的球体为 Ω,球心为 O_1,以定点 P_0 为原点,射线 P_0O_1 为正 z 轴建立直角坐标系,则球面的方程为

$$x^2+y^2+z^2=2Rz.$$

设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性,得 $\bar{x}=0,\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_\Omega kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}=\frac{\iiint\limits_\Omega z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}.$$

而 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^2\cdot\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{32}{15}\pi R^5$,

$\iiint\limits_\Omega z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^3\cos\varphi\cdot\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{8}{3}\pi R^6$.

故 $\bar{z}=\frac{5}{4}R$.

习　题　八

一、选择题

1. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 可以写成

A. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$.

B. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$.

D. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$. 【 】

2. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)dudv$，其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于

A. xy.

B. $2xy$.

C. $xy+\frac{1}{8}$.

D. $xy+1$. 【 】

3. 设 D 是由曲线 $y=x^2-1$ 和 $y=\sqrt{1-x^2}$ 围成的平面区域，则 $\iint\limits_D (axy+by^2)dxdy$

A. 等于0.

B. 符号与 a 有关，与 b 无关.

C. 符号与 b 有关，与 a 无关.

D. 符号与 a,b 都有关. 【 】

4. 设

$$I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma,I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma,I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2d\sigma,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则

A. $I_3>I_2>I_1$.

B. $I_1>I_2>I_3$.

C. $I_2>I_1>I_3$.

D. $I_3>I_1>I_2$. 【 】

5. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2;z\geqslant 0\}$，$\Omega_1$ 是 Ω 位于第一卦限中的部分，则下列等式中成立的是

A. $\iiint\limits_\Omega x\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_1} x\,dV$.

B. $\iiint\limits_\Omega y\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_1} y\,dV$.

C. $\iiint\limits_\Omega z\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_1} z\,dV$.

D. $\iiint\limits_\Omega xyz\,dV=4\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\,dV$. 【 】

二、填空题

1. 设 Ω 由 $0\leqslant z\leqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定，则其质心坐标是________.

2. 积分 $\int_0^a dx\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$ 在极坐标下的累次积分为________.

3. 设 $D_r=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant r,0\leqslant y\leqslant r\}$，则 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{r^2}\iint\limits_{D_r}\cos(x+y)dxdy=$ ________.

4. 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$ ________.

5. 设 $a>0,f(x)=g(x)=\begin{cases}a,若\ 0\leqslant x\leqslant 1\\0,其他\end{cases}$，而 D 表示全平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy$ $=$ ________.

三、计算题

1. 计算二重积分$\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & \text{若 } 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$. 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

3. 求二重积分$\iint\limits_{D}y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 所围成的平面区域.

4. 计算二重积分$\iint\limits_{D}|x^2+y^2-1|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

5. 计算 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}V$.

6. 空间物体由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和锥面 $y=\sqrt{x^2+z^2}$ 界定，物体在每一点 (x,y,z) 的质量密度等于 y，试求该物体的质量.

参　考　答　案

一、1. D　2. C　3. C　4. A　5. C

二、1. $\left(0,0,\frac{1}{4}\right)$.　2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.　3. 8π.

4. $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　5. $I=a^2$.

三、1. $I=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right)$.（利用极坐标）　2. $I=\frac{49}{20}$.

3. $I=-\frac{2}{3}$.（利用奇偶性）　4. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$.　5. 2π.　6. $\frac{\pi}{8}a^4$.